Chapitre 5: Théorèmes générauxe

ces théorèmes permettent de résondre un grand nombre des problèmes de la mécanique.

I - Théorème de moment cinétique:

Rappet: + of (M) = of Am VRg(M) + of (F) = of AF (Mest be pt d'application de F) I-1. Enoncé du théorème:

soit Mm) en mut pour rapport à un référentiel galiléen Rg let soit à un prefixe dans Rg. Par définition; on a : du cou) = E Molfert)

Enoncé : la dérivée par rapport au temps du moment cinétique du pt M pour rapport au pt fine d'est égale à la somme des moments des fonces appliqués en ce même pt.

= doff) (off \ m\v\_{R\_0}(m))
= doff) \ \( \lambda m\v\_{R\_0}(m) + off \ \ m\v\_{R\_0}(m) \)
= off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \ \( \lambda \) = off \(

Remarque :

+ les théorème reste valable quelque soit le pt fixe dans Rg.

+ si le pt materiel est isolé (EFext=8)

ou si M(F) = 8 = 5 (M) est un verteur conste

De préférence, on calcule le moment unetique Y un pt fixe & Cependant si on considére un pt A mobile dans Rg. On peut

ecrire de de (Añ ~ m Veg (M))

= dAñ ) ~ m Veg (M) + Añ ~ m Veg (M)

= dAñ ) ~ m Veg (M) + Añ ~ m Veg (M)

dAñ ) = d (Aō + oñ) ) eg

dt / Rg dt / Rg (M) + VRg (M)

dt / Rg (M) + VRg (M)

dt / Rg (M) - VRg (M) / PRG (M)

down = -VRO(A) AF(H) + = TRO(Fi)

Si A est fixe dans Ra =)  $\nabla_{R_0}(A) = \delta$   $\frac{dG_0(M)}{dt} = \sum_{i} \mathcal{H}_A(\vec{F}_i)$ 

+ si Mest en mut dans un réf. non galelei

dont of un pt fixe dans R'.

donti) = d (oth n m Vr. (M)

= doind ) ~ m Vp1 (M) + OTA ~ m Vp1 (M)

**▼ETUUP** 

Th = mfeg = -mg I sind of O = Orisou + O C= avec: wit = Pour des petites oscillations : sino = 0 ( faible) l'équation devient: 0 + vi 0 = 0 da solution est une fonction sinuscidal de pulsation w: 19 Ce qui donne T la periode des oscillations: T = 27 / 1 Ce résultat est utilisé pour trouver la valeur de la pesenteur q. II - Thide l'energie cinétique: II 1 Travail-Paissance: soit un pt materiel M(m), en mut dans un réf. donné R, qui subit une force F le travail élementaine de la fonce F produit un intervalle de temps St est dw = F'. doff su don est le dép. élént. effertuer par la particule 71. ou aussi : dw = F.V. dt =) le travail de É sur un trajet fini M, Me W = S É, dom = S É. V. dt ti: l'instant où M est en M1. ta: L'instant où M est en Ma. On définit, la paissance de F par : P(F) = dw = F. J(M) =) w = ( + 9(F) dt.



emités: w (joule = 1)

Remarque

+ W est P dépendent du référentiel dans lequel le mut est effectué (cru ils dépendent de OFT et V).

\* si la force ? appliqué au pt 17 est

une force constante alors:

W = F. don = F. M. M. ( Jaon = tin)

3 Cas à distinguer:

+ si F est I au déplacement,

W=0: Pne travaille pas cad.

F'ne contribue pas au mvt.

opposé: W/O : È est une force résistante.

c.à.d F s'oppose au mvt. + si F et MM2 st colinéaires et de même sens > W>O : F est une force motrice c.à.d que F contribue au mvt.

- F: force de rappel d'un ressert.

$$\vec{F} = -k \cdot \Delta l \cdot \vec{c_k} \qquad (\Delta l = l - l_0)$$

$$= -k \times \vec{e_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{e_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

$$= -k \times \vec{c_k} \qquad (\Delta l = k - l_0)$$

II. 2 Changement de référentiel : - soit win pit 11, en mut par rapport à un réf. R' mobile par rapport à Refin). \* L. C.V: Vo(11) = Vp(11) + Ve F. VR(11) = F. YR(11) + F. Ve Phissance Phissance Phissance absplue relative d'entrainment => S. P. (F) . dt = S. P. (F) . dt + S. P. (F) dt Wa(F) = Wr(F) + We(F) On dit que le travail et la puissance st additifs. Contrairement à l'energie cinétique qui n'est pas additive. En effet : Eca = 1 m (VR(M)) => Eca = 1 m (Ve (M) + Ve) Eca = 1 m. Vr + 1 m Ve + m Vr. Je terme supplementain Ec. II.3. Enerice du thécrème . + soit un pt M(m), en mut dans un réf. galiléen Rg et F la résultance des forces appliquées à M. P.F.D/Rg (n) = m. dve(h) . Ve(m) = m . dt dv e(m) Th. de l'energie-Puissance. P(F) = dEc => P(F) dt = dEc dw = dEc sur an trajet fini M. Me. dw = fdEc =

Y (F) = Ec (M) - Ec (M) c'est le Hh. de l'Ec

It.

Enoncé: La variation de l'energie cinétique d'un pt mot. M'entre les positions Me et Ma est égale au travail des forces s'exercent sur M.

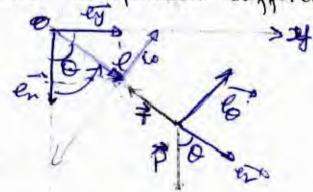
+ si maintenant, le pt 11 en mut de un réf. R' non galiléen:

M. dy V = F. Vr + fie Vr + fie vr

是(z.m.vr) = ア(デ)+ア(Fie)

 $\frac{d}{dt}(E_{cr}) = \mathcal{P}_{r}(\vec{F}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{ic})$   $= \sum_{n} dE_{cr} = \int_{t_{i}}^{t_{i}} \mathcal{P}_{r}(\vec{F}) dt + \int_{t_{i}}^{t_{i}} \mathcal{P}_{r}(\vec{F}_{ic}) dt$   $= \sum_{n} dE_{cr} = \int_{t_{i}}^{t_{i}} \mathcal{P}_{r}(\vec{F}) dt + \int_{t_{i}}^{t_{i}} \mathcal{P}_{r}(\vec{F}_{ic}) dt$   $= \sum_{n} dE_{cr}(n_{n}) - E_{cr}(n_{i}) = W_{r}(\vec{F}) + W_{r}(\vec{F}_{ic})$ 

+ Reprendre l'exemple en personne Cherchons l'équation différentièlle



THE



dEc = &W (Faxt) + dEc = ? Sw(T) = ? Sw (B) = ? + Fc = 1 m VL 01 = V = 60 01 = V Ec = 1 m l (0)2

dEc = m. 12 80 10b. 7 = (T) was in Fa. 2 = 10 5 obl = 1736 0= 30 (Obl). FT = \_ (T) wo <= FOD, 9 = (F) WB = m g & 1 d0 & = m of l do ex (-sine ex + coso ex)

= m of l sine do

= m of l si 1.0 =- q sino 0 + 9 sin 0 = 0. Retrouver cette equation en utilisant P.F.D. III - Energie potentielle: III - 1 Forces conservatives: Une force est dite conservative si son

travail ne dépend pos du chemin suivi

par son pt d'application.

SETUSUP.COM.

et de l'état final.

\* si Le travail d'une force ? dépend du trajet suivi.

=) On dit qu'elle est non conservative.

forces conservatives - Force électrostatique Fe = q. É

forces non conservatives. force de frotteme

le travail d'une fonce conservative ne dépend que de l'état initial et l'état final d'un pt M. relle peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelé énergie potentielle en écrivant:

à partir de laquelle, on va décluse:

(F) DEP = -W(F)

dEP = -dw(F)

= -F. don (1)

Or pour une fonction scalaire : f, on as df = grad f, don

=> dEp = grad Ep . dort (8) de (0) et (2) : F = -grad Ep ,

On dit qu' une pt conservative dérive d'une Energie petentiel.



Emples de calcul 1) \* Energie potentiel du pesanteur : Epp dEp = - dw (P) = - P. don = + m. g k (dx i + dy ] + d8k) = m.g ds Epp = mgg + cte à une este prés Dans Ce cas, par convention, on prend: Ep(3=0) = 0 (Ausol) => Epp = m q z \* L'energie potentiel de pescenteur Epp augment avec l'atitude alors Elle dépende de la position de 11 par import our sol. Cette energie est due à l'interaction du solide avec la terre. 2). Energie potentiel electrostatique: « Force electrostatique: applique d'une charge q: F = q. E = - q grad V où V'est le potentiel electrostatique. F = - grad (qv) => la quantité (qv) représente alors l'energie patentiel électrostatique. Ep= qV => W (Fe) = - DEP =- (ZPB-ZPA) We(Fe) = q(VA-VB) 3). Travail d'une force de rappel d'un ressort: dEp = -dw(Fr) =(- Kx I).dx i = Kx dx

=> Ep = + K x + cte et on prend  $E_p(x=0) = 0$ => Ep = 1 k x2 Remarque : + si un pt material M est soumis à plusieurs force conservative: Fic = - grad 5 l'energie potentiel total de la particul est alors: Ep(T1) = Ep(T1) + Ep(T1) +---IV - Energie mécanique: + C'est la somme de l'energie cinetique et l'energie potentiel d'un pt M dans un referentiel donné R. Ec = 1 m V2 Ep = Ep + Ep + .-IV \_ 1 Conservation de l'energe mécanic D'après le T.E.C., on as DEC = Z. W. (Feat) = Z W (Fax) + Z W (Fax) DEC = - DEP + ZW (Fent) Eg - Ey = - (Ep - Ep) + ZW (Feit) (Ecz + EPz) - (EP, + Ec,) = EW (Fent) DEM = EW (Feat) la variation de l'energe mécanique est égale ou travail de la résultante des forces non conservatives appliques à TI. \* si le pt M est soumis uniquement à des forces conservatives: =) DEm = 0 (Ema= Em,) Em = cste : on dit que l'energie mécanique est une este de mot SETUSUP

te

On dit aussi que Em se conserve au cours du mut.

une fonction conservative possède.

3 propriéts :

- W(F) ne dépend pas du trajet

- F dérive d'une Ep.

- Em (M) est constant.

Une masse in mobile soms frottement sur un axie horizontal (Ox) est ramené par une force F vers le pt O. F = -Kx I ; forces exterieur: P, R, F

=> w(P) = w(R) = 0

 $E_{c} = \frac{1}{2} m V^{2} = \frac{1}{2} m x^{2}$ 

Ep = 1 k x2 (Ep associée à F = - KXI)

Em = Ec + Ep

= 1 m x + 1 k x2

le pt est soumis à F qui est une force conservative.

=> Em(M) = cste

=> dEm =0

mxxxxxx = 0

i + K = 0 Equation differentieble du mil I - Equilibre d'un pt M soumis à une force conservatives

I . 1 positions d'équilibre.

Pour simplifier on supposera que le pt 11 est sauviis à une fonce conservative ? et il se déplace sur un ave horizontal  $\vec{F} = F_x(x) \vec{e_x} \quad (\vec{F}//Oxe)$ Le pt 17 est dans une position d'equilibre si :  $F_x = 0$   $\vec{F}$  est constant  $\Rightarrow \vec{F} = -grad Ep$   $\Rightarrow \vec{F_x} = -\frac{dEp}{dx}$   $\Rightarrow \frac{dEp}{dx} = 0$ 

les position d'equilibre s'obtiennent alors En cherchant les extrimums de Eple V2 stabilité:

Plaçons au pt xo qu'est une position d'équilibre et effectuant un petit déplacement (x -xo) à partir de ute position.

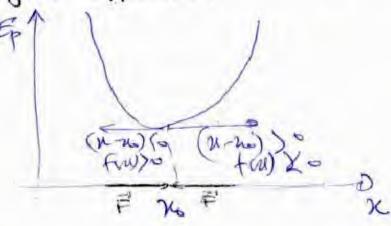
Ecrivens, le D.T de Fon, au pt xe au 1° ordre :

$$F(x) = F(x_0) + (x_{-x_0}) \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x_0}$$

$$= -(x_{-x_0}) \cdot \frac{d^2 F_{p}}{dx^2} \Big|_{x_0}$$

si dep) >0 = Ep est minimal auptre

=> F(x) et le déplacement (x = x0) sont de signes opposées.

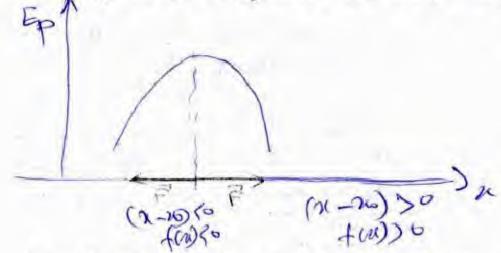




Dans ce cas 11 est romané vers sa position d'équilibre. On dit que l'équilibre est stable.

+ si deEp) (0 =) Ep est maximale au ptx.

=> F(x) et (x-x0) sont de même signe.



le pt 11 tend à s'écurter de sa position. d'equilibre. l'équilibre est dit instable





Programmation C ours Résumés Xercices Contrôles Continus Langues MTU Thermodynamique Multimedia Economie Travaux Dirigés := Chimie Organique

et encore plus..